

# 轴对称稳定温度场中混凝土圆柱体热应力的解析分析\*

梁磊<sup>1</sup>, 赵文<sup>2</sup>, 李艺<sup>2</sup>

(1. 盘锦市建设工程质量监督站, 辽宁 盘锦 124010;  
2. 东北大学资源与土木工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘要:** 混凝土圆筒或圆柱体内部会在温度场的作用下产生热应力。文中对圆筒在轴向温度有变化情况下轴对称稳定温度场中的热应力进行了解析分析, 得到了解析解的完整形式; 利用指数函数和三角函数的性质, 探讨了待定系数的解法; 通过布点对  $\Phi 200 \times 550 \text{ mm}^3$  混凝土圆柱体进行温度测试, 而后利用解析结果、测温试验结果、Matlab 给出了温度测试中混凝土圆柱体的计算实例。结果表明: 轴对称稳定温度场中, 受热温度由  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  变为  $120 \text{ }^\circ\text{C}$  时, 混凝土圆柱体应力分布的形状没有改变, 内部的应力值处于同一个数量级, 应力范围增大了 0.4 倍左右。

**关键词:** 混凝土; 圆柱体; 热应力; 解析解; 温度测试

**中图分类号:** TU502.4; TU13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2014)05-0032-07

## The Analysis of Thermal Stress of Concrete Cylinder in the Steady Ax-symmetric Temperature Field

LIANG Lei<sup>1</sup>, ZHAO Wen<sup>2</sup>, LI Yi<sup>2</sup>

(1. Panjin Construction Engineering Quality Supervising Station, Panjin, 124010, China;

2. College of Resource and Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

**Abstract:** The temperature field will generate thermal stress in the concrete cylinder. The thermal stress for mutative axial temperature in the steady ax-symmetric temperature field is analyzed, then the full analytical solution is obtained and the solution of undetermined coefficients is discussed using the property of power and trigonometric function. Based on the results of temperature testing by temperature sensor deposited beforehand and analytical solution, the numerical examples about the  $\Phi 200 \times 550 \text{ mm}^3$  concrete cylinder are given by Matlab. By the analysis, the conclusions can be got as the follows: the distribution of thermal stress in concrete cylinder wouldn't change, the values of stress would be in the same order of magnitude, and the range of stress would increase 40 percents nearly in the steady ax-symmetric temperature field as temperature has transformed from  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  to  $120 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Key words:** concrete; cylinder; thermal stress; analytical solution; temperature testing

圆筒在温度场中的热应力, 吕运冰<sup>[1]</sup>、Ding H J<sup>[2]</sup>、绍珠山<sup>[3]</sup>等做了大量的研究工作, 但是应用于混凝土的较少。在现代结构工程中, 混凝土承受  $50 \text{ }^\circ\text{C}$  以上温度荷载的情况日益增多, 包括诸如承压熔炉、烟囱、核反应堆等工业安装装置<sup>[4-5]</sup>。此时, 温度变化产生的胀缩受到外部或内部约束的限

制而不能自由进行, 结构或部件的内部将有热应力产生。

本文结合课题, 主要考虑贮存核废料的混凝土容器—混凝土桶内核废料长期衰变放热达到稳定温度场时的情况, 对其进行热应力的解析分析。利用混凝土圆柱体的测温试验和 Matlab7.0 软件, 得到

\* 收稿日期: 2013-12-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50508008)

作者简介: 梁磊 (1977年生), 男; 研究方向: 建筑材料的高温耐久性; E-mail: liang221@126.com

了算例的热应力解析解。从而得到了一种通过布点进行温度测试，由拟合的温度场应用热应力解析分析来求解轴对称稳定温度场中混凝土圆柱体的热应力的方法。

### 1 轴对称稳定温度场的解法思想

由文献 [6] 可知，对于圆筒或圆柱体，无内热源的稳定温度场的热传导微分方程为

$$\nabla^2 T = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T = 0 \quad (1)$$

此时属于轴对称问题。各处的应力、应变和位移分量都对称于  $z$  轴，这些物理量只是  $r$  和  $z$  的函数，不随  $\theta$  变化，忽略体力的应力可由位移和温差表达<sup>[7]</sup>：

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2G \left[ \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - \beta T \\ \sigma_\theta &= 2G \left[ \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{u}{r} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] - \beta T \\ \sigma_z &= 2G \left[ \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right] - \beta T \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = G \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

式中， $u$ 、 $w$  为质点沿  $r$  方向、 $z$  轴的位移； $T$  为温度变化； $G$  为剪切弹性模量， $G = E / [2(1 + \mu)]$ ； $\beta$  为热应力系数， $\beta = \alpha E / (1 - 2\mu)$ ； $\mu$  为泊松比，假定其为常数； $\alpha$  为线膨胀系数，假定其为常数。

通过位移法，利用位移势函数，见式 (3)，可得到应力表达如式 (4)<sup>[6]</sup>：

$$\nabla^2 \psi = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha T \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_r &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \nabla^2 \psi \right); \quad \sigma'_z = \frac{E}{1 + \mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi \right) \\ \sigma'_\theta &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \nabla^2 \psi \right); \quad \tau'_{rz} = \frac{E}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

由  $\psi$  解得的非奇次特解往往不满足边界条件，因此引入能使基本方程成为双调和方程的 Love 函数。由等温弹性理论及式 (2)， $L$  对应的应力分量为：

$$\begin{aligned} \sigma''_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) L; \quad \sigma''_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] L \\ \sigma''_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) L; \quad \tau''_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] L \end{aligned} \quad (5)$$

取  $L = -EL^* / (1 + \mu)$ ，将其代入式 (5) 中应力

分量表达式，并把得到的结果与式 (4) 中的应力分量相叠加，得到：

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \nabla^2 \psi + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial L^*}{\partial z} - \mu \nabla^2 \frac{\partial L^*}{\partial z} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \nabla^2 \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial L^*}{\partial z} - \mu \nabla^2 \frac{\partial L^*}{\partial z} \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial L^*}{\partial z} - (2 - \mu) \nabla^2 \frac{\partial L^*}{\partial z} \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \cdot \frac{\partial L^*}{\partial z} - (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 L^* \right) \end{aligned} \quad (6)$$

### 2 轴向温度有变化时热应力分析

对于轴向温度有变化的轴对称稳定温度场，利用分离变量法，令  $T = R(r) \cdot Z(z)$ ，从式 (1) 解得：

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - XR &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + XZ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $X$  为常数，对于圆筒顶端和底端同时受热的情况，以其中心为坐标原点，有  $Z(z) = Z(-z)$ 。当  $X = 0$  时，解得轴向温度为常数，这不符合轴向温度变化，因此考虑  $X$  不为零的情况。

#### 2.1 轴向温度为指数函数时圆筒的热应力

当  $X < 0$ ，设  $X = -m^2$  ( $m \neq 0$ )，根据文献 [8]，代入式 (7) 解出：

$$T = [G_3 J_0(mr) + G_4 Y_0(mr)] (G_1 e^{mz} + G_2 e^{-mz}) \quad (8)$$

为了方便书写，引入如下函数：

$$\begin{aligned} U &= U(mr) = U_1 J_0(mr) + U_2 Y_0(mr) \\ U' &= U'(mr) = U_1 J_1(mr) + U_2 Y_1(mr) \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $J_0(mr)$ 、 $J_1(mr)$  为第一类零、一阶 Bessel 函数； $Y_0(mr)$ 、 $Y_1(mr)$  为第二类零、一阶 Bessel 函数；

$U_1 \sim U_2$ 、 $G_1 \sim G_4$  为系数。

文献 [6] 中提到  $L^*$  包括满足拉普拉斯方程和双调和方程两个部分，根据式 (3)、(8)、(9)、(6)，利用 Bessel 函数的性质，取  $\psi$ 、 $L^*$  为以下形式：

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{a}{2m} (rA'e^{mz} + rB'e^{-mz}) \\ L^* &= \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{a}{2m^2} [(D + rC')e^{mz} - (E + rF')e^{-mz}] \end{aligned} \quad (10)$$

由此可得到既满足位移法基本方程，又满足边界条件的应力分量，见式 (11)。式 (10)、(11) 中  $A$

$\sim F$ 、 $A' \sim F'$  的表达式见式 (9) 中  $U$ 、 $U'$ ，其中  $A_1 = G_3 \cdot G_1$ ， $A_2 = G_4 \cdot G_1$ ， $B_1 = G_3 \cdot G_2$ ， $B_2 = G_4 \cdot G_2$ 。

根据边界自由条件，把圆筒的内、外半径代入式 (11) 的第一式和第四式，使指数函数的系数为零，从而可解出待定系数  $C_1 \sim F_2$ 。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \left\{ \left[ -A - mr(A'+C') - mD + \frac{D'}{r} + (1-2\mu)C \right] e^{mz} + \left[ -B - mr(B'+F') - mE + \frac{E'}{r} + (1-2\mu)F \right] e^{-mz} \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \left\{ \left[ -A - \frac{D'}{r} + (1-2\mu)C \right] e^{mz} + \left[ -B - \frac{E'}{r} + (1-2\mu)F \right] e^{-mz} \right\} \\ \sigma_z &= \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \left\{ \left[ -2A + mr(A'+C') + mD - 2(2-\mu)C \right] e^{mz} + \left[ -2B + mr(B'+F') + mE - 2(2-\mu)F \right] e^{-mz} \right\} \\ \tau_{rz} &= \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \left\{ \left[ mr(A+C) - mD' + 2(1-\mu)C' \right] \cdot e^{mz} - \left[ mr(B+F) - mE' + 2(1-\mu)F' \right] e^{-mz} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2 轴向温度为三角函数时圆筒的热应力

当  $X > 0$ ，设  $X = m^2$  ( $m \neq 0$ )，根据文献 [8]，代入式 (7) 解出：

$$T = [G_3 I_0(mr) + G_4 K_0(mr)] (G_1 \cos mz + G_2 \sin mz) \quad (12)$$

为了方便书写，引入如下函数：

$$\begin{aligned} U &= U(mr) = U_1 I_0(mr) + U_2 K_0(mr) \\ U' &= U'(mr) = U_1 I_1(mr) - U_2 K_1(mr) \end{aligned} \quad (13)$$

式中  $I_0(mr)$ 、 $I_1(mr)$  为第一类零、一阶变型 Bessel 函数；

$K_0(mr)$ 、 $K_1(mr)$  为第二类零、一阶变型 Bessel 函数；

$U_1 \sim U_2$ 、 $G_1 \sim G_4$  为系数。

文献 [6] 中提到  $L^*$  包括满足拉普拉斯方程和双调和方程两个部分，根据式 (3)、(12)、(13)、(6)，利用 Bessel 函数的性质，取  $\Psi$ 、 $L^*$  为以下形式：

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha}{2m^2} (mrA' \cos mz + mrB' \sin mz) \\ L^* &= \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha}{2m^2} \left[ (D + mrC') \cdot \left( \frac{\sin mz}{m} + (E + mrF') \frac{\cos mz}{m} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

由此可得到既满足位移法基本方程，又满足边界条

件的应力分量，见式 (15)。式 (14)、(15) 中  $A \sim F$ 、 $A' \sim F'$  的表达式见式 (13) 中  $U$ 、 $U'$ ，其中  $A_1 = G_3 \cdot G_1$ ， $A_2 = G_4 \cdot G_1$ ， $B_1 = G_3 \cdot G_2$ ， $B_2 = G_4 \cdot G_2$ 。

根据边界自由条件，把圆筒的内、外半径代入式 (15) 的第一式和第四式，使三角函数的系数为零，从而可解出待定系数  $C_1 \sim F_2$ 。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \cdot \left\{ \left[ -A + D + (1-2\mu)C + mr(A'+C') - \frac{D'}{mr} \right] \cos mz + \left[ -B - E - (1-2\mu)F + mr(B'-F') + \frac{E'}{mr} \right] \sin mz \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \left\{ \left[ -A + (1-2\mu)C + \frac{D'}{mr} \right] \cos mz + \left[ -B - (1-2\mu)F - \frac{E'}{mr} \right] \sin mz \right\} \\ \sigma_z &= \frac{-E\alpha}{2(1-\mu)} \cdot \left\{ \left[ 2A + D + 2(2-\mu)C + mr(A'+C') \right] \cos mz + \left[ 2B - E - 2(2-\mu)F + mr(B'-F') \right] \sin mz \right\} \\ \tau_{rz} &= \frac{-E\alpha}{2(1-\mu)} \cdot \left\{ \left[ mr(A+C) + D' + 2(1-\mu)C' \right] \sin mz + \left[ mr(-B+F) + E' + 2(1-\mu)F' \right] \cos mz \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

## 3 温度场的试验测试

试验选用华日牌 42.5# 普通硅酸盐水泥，密度为 3 000 kg/m<sup>3</sup>；细度模数为 2.6 的中砂，密度为 2 630 kg/m<sup>3</sup>；最大粒径为 20 mm 的碎石，密度为 2 730 kg/m<sup>3</sup>；花王萘系减水剂；鞍山钢铁集团矿渣开发公司提供的矿渣微粉，密度为 2 910 kg/m<sup>3</sup>，比表面积为 430 m<sup>2</sup>/kg；汕特龙湖科技实业公司提供的粉状 P803 消泡剂。采取配合比见表 1。

表 1 混凝土测温试验配合比

Table 1 Mix proportion of concrete for test on measuring temperature

水	水泥	矿渣微粉	砂子	碎石	减水剂	消泡剂
/kg	/kg	/kg	/kg	/kg	/%	/%
180	400	100	585	1 188	2	0.01

焊接一个  $\Phi 6$  钢筋网架，在所测点位置（以成型后混凝土圆柱体中心为柱坐标系原点， $z$  为 0、6、12、18、24 cm， $r$  为 0、4、8 cm 处）放置数字式温度传感器 DS18B20，其不同于以往的模拟式温

度传感器，不需要稳定的参考电压、信号调理电路、高位数的 A/D 转换器，因此能够利用便携式仪表进行测量，并可自动识别测温处的点号。将钢筋网架放入内径为 200 mm，壁厚为 2 mm，长度为 550 mm 的 GFRP 空心圆筒内，圆筒底部用 4 mm 厚圆形铝塑板粘合玻璃胶封严，见图 1 (a)。

浇筑之前将温度传感器导线标号并导出圆筒。混凝土浇筑后，放入养护室按照 GBJ81 - 85 养护成型，GFRP 圆筒外壁用手动砂轮切开并卸下，成型后的混凝土圆柱体见图 1 (b)。



(a)钢筋网架与GFRP圆筒



(b)成型后的混凝土圆柱体

图 1 内部置有温度传感器的混凝土圆柱体

Fig. 1 Concrete cylinder where temperature sensors are laid

储藏低中放核废料的混凝土的温度能达到 150 °C<sup>[9]</sup>，但考虑到数字式温度传感器 DS18B20 在 120 °C 以上的测试还不够精确，因此混凝土圆柱体的受热温度选用与 150 °C 相近的 100 °C 和 120 °C。

混凝土圆柱体在受热前，测得内部温度为 20 °C，采用电热鼓风干燥箱对其进行加热，受热时间分别为 3、6、12 h。利用测温仪表通过导线测得混凝土圆柱体内部温度如表 2。

### 4 圆柱体算例分析

经过试验，受热 3、6 h 的混凝土圆柱体中心轴处的温度和烘箱温度设定值有较大差距；受热 12 h 的混凝土圆柱体中心轴处的温度和烘箱温度

设定值十分相近，见表 2。考虑到测温过程中热量随测温进程的散失、温度传感器 ±0.5 °C 的误差，以及本文所需温差不随时间改变的情况，故认为受热 12 h 的混凝土圆柱体内部温度场达到了稳定状态。

如上节坐标系，因顶端、底端受热一致，所以可将  $r$  为 8 cm 处的温升表示为  $\cos z$ 、 $\sin |z|$ 、 $\cos z + \sin |z|$ 、 $e^{-|z|}$ 、 $e^{-|z|}$ 、 $e^z + e^{-z}$  的级数形式，但级数的各项系数如果过大，将导致温度场精度不足。在求出结果经过比较后发现，温升表示为  $e^{-|z|}$  的级数时，其系数最小。由于圆柱体关于  $z=0$  平面对称，故以下只研究圆柱体上半部的情况，此时其温度场可表达为

$$T = \sum_{m=1}^5 [A_{1m}J_0(mr) + A_{2m}Y_0(mr)] \cdot e^{-mz} \quad (16)$$

如果已知圆柱体内部  $r=a$  和外部  $r=b$  的温度函数 (考虑  $z=0$  平面上部)：

$$T|_{r=a} = \sum_{m=1}^5 p_m e^{-mz}; T|_{r=b} = \sum_{m=1}^5 q_m e^{-mz} \quad (17)$$

则温度场表达式中的系数为：

$$\begin{aligned} A_{1m} &= \frac{p_m Y_0(mb) - q_m Y_0(ma)}{J_0(ma) Y_0(mb) - J_0(mb) Y_0(ma)} \\ A_{2m} &= \frac{q_m J_0(ma) - p_m J_0(mb)}{J_0(ma) Y_0(mb) - J_0(mb) Y_0(ma)} \end{aligned} \quad (18)$$

取  $a=0$ ， $b=0.08$ ，由第二类 Bessel 函数的性质可知  $Y_0(0)$  为负无穷，因此  $A_{2m}$  等于零，而  $A_{1m}$  应用洛毕塔法则求解，为

$$A_{1m} = \frac{q_m}{J_0(mb)} \quad (19)$$

把  $A_{1m}$  记为  $A_m$ 。代入表 2 中  $r$  为 8 cm 处的试验值，得到受热 100 °C、120 °C 达稳定时混凝土圆柱体的温升分别为式 (20)、(21)。把测点坐标代入式 (20)、(21)，与试验值对比见表 2，可见二者十分接近，拟合效果较好，于是可求得热应力，见式 (22)。

$$T = \{-360.1 \quad 1931.6 \quad -2924.6 \quad 1864.1 \quad -436.2\} \cdot \{J_0(r)e^z \quad J_0(2r)e^{2z} \quad J_0(3r)e^{3z} \quad J_0(4r)e^{4z} \quad J_0(5r)e^{5z}\}^T \quad (20)$$

$$T = \{-225.2 \quad 1684.7 \quad -2767.6 \quad 1856.1 \quad -452.1\} \cdot \{J_0(r)e^z \quad J_0(2r)e^{2z} \quad J_0(3r)e^{3z} \quad J_0(4r)e^{4z} \quad J_0(5r)e^{5z}\}^T \quad (21)$$

表 2 解析值与试验值的对比

Table 2 Comparison between analytical results and testing results

z / cm	烘箱温度 100 °C, 加热 12 h						烘箱温度 120 °C, 加热 12 h					
	温升试验值			温升解析值			温升试验值			温升解析值		
	r=0 cm	r=4 cm	r=8 cm	r=0 cm	r=4 cm	r=8 cm	r=0 cm	r=4 cm	r=8 cm	r=0 cm	r=4 cm	r=8 cm
0	74.3	74.5	75.0	74.80	74.81	74.85	92.3	94.0	96.0	95.90	95.90	95.90
6	74.5	74.8	75.2	75.05	75.05	75.02	93.4	94.3	96.3	96.24	96.23	96.18
12	74.8	75.0	75.5	75.33	75.33	75.29	93.5	94.6	96.8	96.69	96.69	96.66
18	75.3	75.6	76.0	75.66	75.68	75.74	94.0	94.8	97.5	97.14	97.20	97.33
24	75.8	76.3	76.5	75.67	75.80	76.18	94.5	95.5	98.0	97.01	97.22	97.79

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \sum_{m=1}^5 e^{mz} \left\{ [-A_m - mD_m + (1-2\mu)C_m] \cdot J_0(mr) + \left[ \frac{D_m}{r} - (A_m + C_m)mr \right] J_1(mr) \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \sum_{m=1}^5 e^{mz} \left\{ [(1-2\mu)C_m - A_m] \cdot J_0(mr) - \frac{D_m}{r} J_1(mr) \right\}$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \cdot \sum_{m=1}^5 e^{mz} \left\{ [mD_m - 2A_m - 2(2-\mu)C_m] \cdot J_0(mr) + mr(A_m + C_m)J_1(mr) \right\}$$

$$\tau_{rz} = \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \cdot \sum_{m=1}^5 e^{mz} \left\{ mr(A_m + C_m)J_0(mr) + [2(1-\mu)C_m - mD_m]J_1(mr) \right\} \quad (22)$$

由边界自由得到  $C_m$ 、 $D_m$  如式 (23)。限于试验条件并考虑到弹性模量、热膨胀系数及泊松比表达式与所求热应力为线性关系, 见式 (22), 在同种情况时的结果分析中热应力之间比例与此无关, 故混凝土的热工参数计算采用文献 [10]、[11] 的方法。测得同期制作的混凝土立方体抗压强度标准值为 55 MPa, 从而得到 100 °C、120 °C 时, 混凝土弹性模量和热膨胀系数分别为  $3.25 \times 10^{10}$  Pa、 $6.07 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $3.15 \times 10^{10}$  Pa、 $6.10 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 。将其代入式 (22), 泊松比取 0.2, 根据文献 [12], 应用 Matlab7.0 算得混凝土圆柱体受热稳定时的应力分布如图 2 所示。

$$\begin{cases} D_m \\ C_m \end{cases} = \begin{cases} \frac{J_1(mr)}{r} - mJ_0(mr) & (1-2\mu)J_0(mr) - mrJ_1(mr)mJ_1(mr) \\ mrJ_1(mr) & -[mrJ_0(mr) + 2(1-\mu)J_1(mr)] \end{cases}^{-1} \cdot \begin{cases} [J_0(mr) + mrJ_1(mr)]A_m \\ mrJ_0(mr)A_m \end{cases} \quad (23)$$

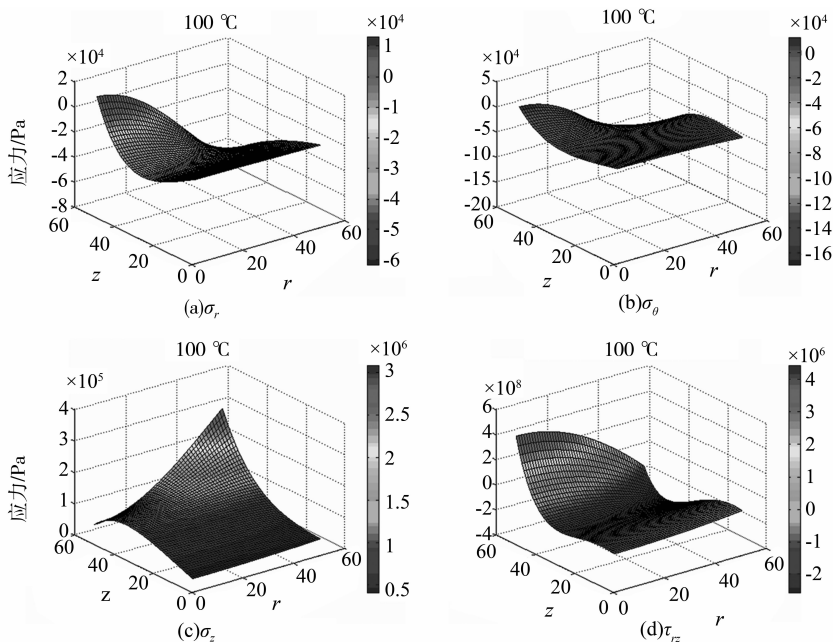


图 2 烘箱温度为 100 °C 时混凝土圆柱体热应力解析解

Fig. 2 Analytical solution of stress about concrete cylinder in the oven dominated by 100 °C

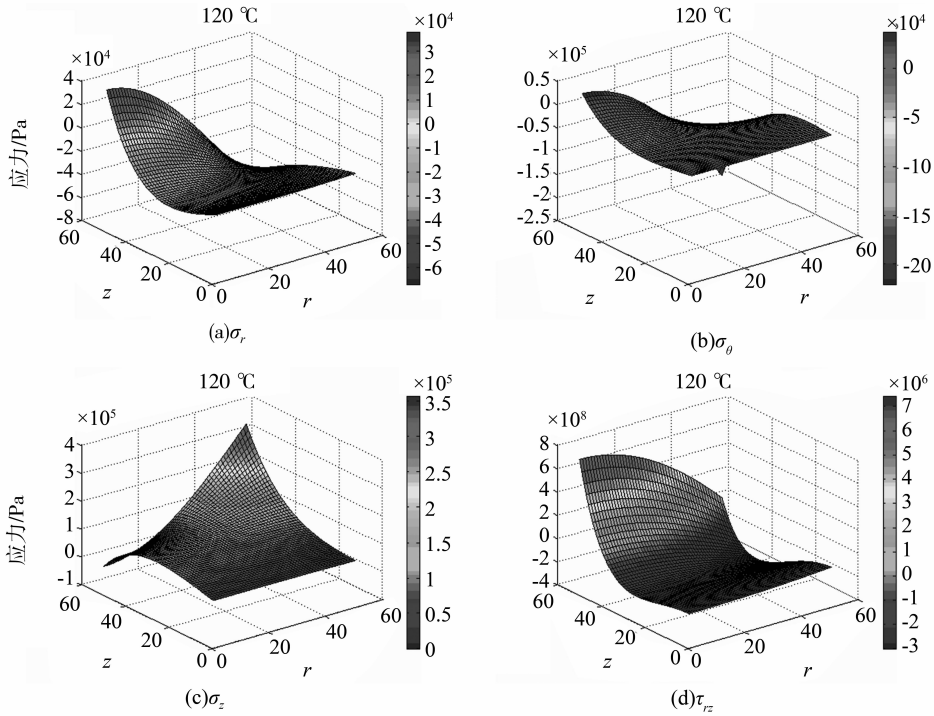


图 3 烘箱温度为 120 °C 时混凝土圆柱体热应力解析解

Fig. 3 Analytical solution of stress about concrete cylinder in the oven dominated by 120 °C

从图 2、3 可以看出，受热温度有变化时，应力分布的形状没有改变：径向正应力  $\sigma_r$  在中心轴处的变化幅度较大，顶部中心附近处于受拉状态，在中心轴顶点达到最大拉应力，在中心平面 ( $z = 0$ ) 处应力值较稳定，基本处于受压状态；环向正应力  $\sigma_\theta$  整体上较为平坦，处于受拉状态，只是在靠外侧的顶部应力变化幅度较大，由受拉状态急剧

过渡到受压状态，并在外侧顶点达到最大压应力；轴向正应力  $\sigma_z$  基本上都处于受拉状态，靠外侧顶部附近应力变化幅度较大，并在外侧顶点达到最大拉应力；剪应力  $\tau_{rz}$  随柱坐标  $z$  向变化明显、幅度较大，应力的方向也发生改变，其值在中心轴顶部较大，并在中心轴顶点达到最大值。

表 3 混凝土圆柱体热应力解析解的最大值和最小值

Table 3 The maximum and minimum of analytical solution of stress in concrete cylinder

温度应力	烘箱温度为 100 °C		烘箱温度为 120 °C	
	最大值 / Pa	最小值 / Pa	最大值 / Pa	最小值 / Pa
$\sigma_r$	1.319 6e+004	-6.216 0e+004	3.862 0e+004	-6.793 8e+004
$\sigma_\theta$	1.315 3e+004	-1.710 7e+005	3.855 8e+004	-2.231 8e+005
$\sigma_z$	3.097 8e+005	3.843 0e+004	3.589 0e+005	-3.516 9e+003
$\tau_{rz}$	4.460 3e+006	-2.619 6e+006	7.482 7e+006	-3.103 2e+006

圆柱体受热稳定时应力最大值和最小值（考虑到应力的方向，参照文献 [6] 规定），见表 3。可以看出，由外部温度试验数据出发求解的热应力，当烘箱温度由 100 °C 变为 120 °C 时，没有出现数量级的变化，但受热温度为 120 °C 时，轴对称稳定温度场对混凝土圆柱体产生的热应力值要比受热温度为 100 °C 大。 $\sigma_r$  的范围为其 1.414 倍； $\sigma_\theta$  的范

围为其 1.421 倍； $\sigma_z$  的范围为其 1.336 倍； $\tau_{rz}$  的范围为其 1.495 倍。

## 5 结 论

轴对称稳定温度场中热应力进行解析求解时要求温度场经过拟合，本文通过布点得到混凝土圆柱体内部测温结果，拟合出精度较好的温度场，从而

根据解析结果, 利用 Matlab 计算得到混凝土圆柱体内部的热应力。通过以上方法及分析得知:

1) 圆柱体表面温度表达为幂为正的指数函数时, 拟合的温度场精度较好。

2) 轴对称稳定温度场的热应力求解中, 应由准确的外部温度试验值出发求解; 受热温度由 100 °C 变为 120 °C 时, 混凝土圆柱体应力分布的形状没有改变, 内部的应力值处于同一个数量级, 应力范围增大了 0.4 倍左右。

#### 参考文献:

- [1] 吕运冰, 肖金生, 张开银. 功能梯度材料圆筒的定常温度分布及热应力[J]. 武汉交通科技大学学报, 1997, 21(2):158-163.
- [2] DING H J, WANG H M, CHEN W Q. A theoretical solution of cylindrically isotropic cylindrical tube for axisymmetric plane strain dynamic thermoelastic problem[J]. ACTA Mechanica Solida Sinica, 2001, 14(4):357-363.
- [3] 绍珠山. 有限长 FGM 圆筒的热/机应力的解析解[J]. 应用力学学报, 2006, 23(1):80-84.
- [4] LUCCIONI B M, FIGUEROA M I, DANESI R F. Ther-

mo-mechanic model for concrete exposed to elevated temperature[J]. Engineering Structures, 2003, 25(6):729-742.

- [5] 李艺, 赵文, 梁磊, 等. 贮存核废料用混杂纤维混凝土弯曲性能试验研究[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2009, 48(6):143-146.
- [6] 严宗达, 王洪礼. 热应力[M]. 三河: 高等教育出版社, 1993:1-238.
- [7] 李维特, 黄保海, 毕仲波. 热应力理论分析及应用[M]. 北京: 中国电力出版社, 2004:89-99.
- [8] 车向凯. 工程技术中常用的数学方法[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1998:109-272.
- [9] MARTA C, ABDELHAFID K, GEORGE C, et al. Effects and interactions of temperature and stress-level related damage on permeability of concrete [J]. Cement and Concrete Research, 2007, 37(1):79-88.
- [10] 吴波, 马忠诚, 欧进萍. 高温后混凝土变形特性及本构关系的试验研究[J]. 建筑结构学报, 1999, 20(5):42-49.
- [11] 李丽, 胡海涛. 钢筋混凝土结构高温性能研究综述[J]. 青岛建筑工程学院学报, 2004, 25(3):33-38.
- [12] 王沫然. MATLAB 与科学计算[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003:26-166.

(上接第 31 页)

- [11] 王丽, 陈阿青, 王晓忠, 等. 扩散温度和时间对晶体硅太阳能电池性能的影响[J]. 电子元件与材料, 2012, 31(4):62-65.
- [12] 谢卿, 高华, 杨乐. 硅太阳能电池扩散方阻均匀性研究[J]. 光电技术应用, 2012, 27(3):50.
- [13] 李晓云, 牛萍娟, 郭维廉. 电化学 C-V 法测量化合物半

导体载流子浓度的研究进展[J]. 微纳电子技术, 2007(2):106-109.

- [14] PARKER E H C, BASARAN E, PARRY C P, et al. Electrochemical capacitance-voltage depth profiling of heavily boron-doped silicon [J]. Journal of Crystal Growth, 1995, 157(1):109-112.